

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: Kati peab maksma 8,2% võrra vähem, kui nädal tagasi

Lahendus:

Olgu seeliku maksumus x eurot ja pluus maksis y eurot.

Nädala pärast oli seeliku hind $0,75x$ ja pluusi hind oli $1,17y$.

Kuna nüüd on pluusi hind 4% võrra suurem, siis:

$$0,75x + 0,04 \cdot 0,75x = 1,17y$$

$$0,78x = 1,17y$$

$$x = 1,5y$$

Nädal tagasi oli seeliku ja pluusi eest vaja maksta: $x + y = 1,5y + y = 2,5y$

Nüüd oli vaja maksta: $0,75x + 1,17y = 0,75 \cdot 1,5y + 1,17y = 2,295y$ ehk nüüd Kati peab maksma vähem, kui oleks pidanud nädal tagasi.

$$\frac{2,5y - 2,295y}{2,5y} = 0,082$$

Ehk nüüd peab Kati maksma 8,2% võrra vähem, kui nädal tagasi.

Hindamine:

Avaldatud seeliku hind nädala pärast	1p
Avaldatud pluusi hind nädala pärast	1p
Koostatud võrrand	1p
Võrrandis x või y avaldamine	1p
Leitud, et nüüd peab Kati maksma vähem	2p
Leitud mitme protsendi võrra on maksumus vähenenud	1p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

Kui vastus leitud mingite konkreetsete arvudega, siis anda maksimaalselt 4p.

2. Vastus: $p = 6$

Lahendus:

Olgu võrrandi $4x^2 - 11x + p = 0$ lahendid a ja b ning võrrandi $4x^2 - 18x + 3p = 0$ lahendid $2a$ ja c .

$$4x^2 - 11x + p = 0$$

$$x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{p}{4} = 0$$

Vastavalt Viète'i teoreemile:

$$a \cdot b = \frac{p}{4} \quad \text{ja} \quad a + b = \frac{11}{4}, \text{ kust } b = \frac{11}{4} - a$$

$$\text{Ning } a \left(\frac{11}{4} - a \right) = \frac{p}{4}$$

$$4x^2 - 18x + 3p = 0$$

$$x^2 - 4,5x + \frac{3p}{4} = 0$$

Vastavalt Viète'i teoreemile:

$$2a \cdot c = \frac{3p}{4} \quad \text{ja} \quad 2a + c = 4,5, \text{ kust } c = 4,5 - 2a$$

$$\text{Ning } 2a(4,5 - 2a) = \frac{3p}{4}$$

Saame:

$$2a(4,5 - 2a) = 3a \left(\frac{11}{4} - a \right)$$

$$9a - 4a^2 = \frac{33a}{4} - 3a^2$$

$$36a - 16a^2 = 33a - 12a^2$$

$$4a^2 - 3a = 0$$

Lahendades võrrandi saame $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{4}$

$a = 0$ ei sobi, sest sel juhul ei ole teise võrrandi lahend kaks korda suurem.

Leiame p :

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{p}{4}$$

Kust $p = 6$.

Hindamine:

Viète'i teoreemi kasutamine esimeses võrrandis	1p
Viète'i teoreemi kasutamine teises võrrandis	1p
p avaldamine ühe muutuja kaudu võrrandites	1p
Ruutvõrrandi koostamine	1p
Ruutvõrrandi lahendamine	1p
Märkus, et $a = 0$ ei sobi	
p väärtuste leidmine ja vastus	<u>1p</u>
	7p

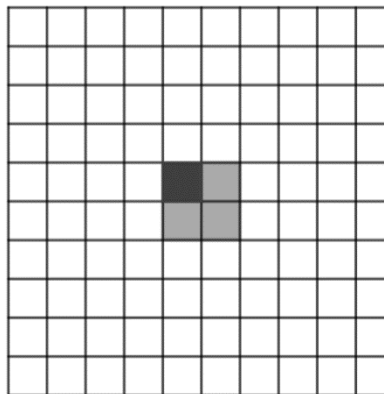
Märkus: ainult õige vastuse eest anda 1p

3. Võidustrateegia on olemas Peetril.

Lahendus:

Märkame, et kui paigutada kujund ruudu keskele nii nagu näidatud joonisel, siis ülejäänud ala on sümmeetriline ruudu keskpunkti suhtes.

Nüüd, kui üks mängija paneb kujundi ükskõik kuhu, siis teisel mängijal on alati võimalus panna kujund sümmeetriliselt keskpunkti suhtes ja nii saab ta teha kuni on võimalik kujundeid lisada. Ehk, kui Peeter paneb esimese kujundi keskele ja siis paneb kujundeid sümmeetriliselt Jaani poolt pandud kujunditele siis ta alati võidab.



Hindamine:

Märkamine, et kui kujund paigutada keskele, siis tekib sümmeetria keskpunkti suhtes 3p

Seletamine, et sellisel juhul saab Peeter alati panna oma kujundi sümmeetriliselt Eeriku omale 3p

Ülevalt olevast järelduse tegemine ja vastuseni jõudmine 1p
7p

Märkus: Antud ainult õige vastus – 0p.

4. Vastus: $MK = 3\sqrt{3}$.

Lahendus:

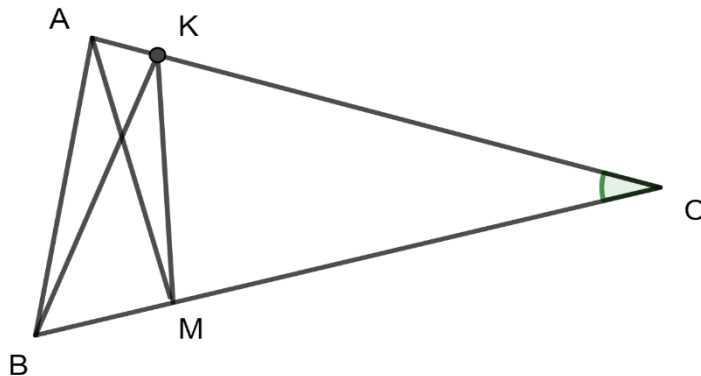
Kolmnurgas AMC ($\angle M = 90^\circ$):

$$\cos 30^\circ = \frac{MC}{AC}$$

Kolmnurgas BKC ($\angle K = 90^\circ$):

$$\cos 30^\circ = \frac{KC}{BC}$$

Järelikult: $\frac{MC}{AC} = \frac{KC}{BC}$



Kolmnurgad ABC ja MKC on

sarnased (sarnasuse tunnus külge-nurk-külge: kaks külge ühes kolmnurgas on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ning nende külgede vaheline nurk on ühine).

Kuna kolmnurgad on sarnased, siis nende küljed on võrdelised: $\frac{MK}{AB} = \frac{KC}{BC} = \frac{MC}{AC}$, ja

$$\frac{MK}{AB} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{MK}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kust $MK = 3\sqrt{3}$.

Hindamine:

Koosinuse avaldamine kolmnurkades AMC ja BKC 2p

(või näitamine, et need kolmnurgad on sarnased)

Põhjendus, et kolmnurgad ABC ja MKC on sarnased 2p

Võrdeteguri leidmine 1p

Sarnasuse kasutamine ja MK leidmine 2p

7p

Märkus: ainult õige vastusse eest anda 2p

5. Vastus: ainuke võimalus: $\left(\left(\left(\left(\left(0 + 3\right) \cdot 3 + 17\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 3\right) + 17 =$
2021

Lahendus:

Alustame lõpust:

Kuna 2021 ei jagu 3 ega 5, siis viimane tehe peab olema liitmine ehk viimase tehte jaoks on olemas kaks varianti:

$$2018 + 3 \text{ ja } 2004 + 17$$

Aga 2018 ei jagu 3-ga ega 5-ga, seega variant $2018+3$ ei sobi

Enne liitmist peab kindlasti olema korrutamine, sest kaks liitmist järjest on keelatud. Kuna 2004 ei jagu 5-ga, siis eelmine tehe oli kolme korrutamine: $668 \cdot 3$.
 $(668 \cdot 3) + 17 = 2021$

Nüüd peab kindlasti olema liitmine: kas $665 + 3$ või $651 + 17$.

Vaatame nüüd mõlemat varianti:

a) $((665 + 3) \cdot 3) + 17 = 2021$

Kuna 665 ei jagu 3-ga, siis eelmine tehe kindlasti oli 5-ga korrutamine ehk $133 \cdot 5$:

$$((133 \cdot 5 + 3) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Nüüd on liitmine: kas $130 + 3$ või $116 + 17$, aga kuna 116 ei jagu 3-ga ega 5-ga, siis $116 + 17$ ei sobi ning jääb ainuke variant:

$$(((130 + 3) \cdot 5 + 3) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Kuna 130 ei jagu 3-ga, siis eelmine tehe peab olema 5-ga korrutamine $26 \cdot 5$ ehk

$$(((26 \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 3) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Nüüd on liitmise jaoks 2 võimalust: kas $23 + 3$ või $9 + 17$.

Kuna 23 ei jagu 3-ga ega 5-ga, siis variant $23 + 3$ ei sobi ja jääb ainult $9 + 17$ ehk

$$\left(\left(\left(\left(9 + 17\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 3\right) + 17 = 2021$$

Kuna 9 ei jagu 5-ga, siis eelmine tehe oli korrutamine: $3 \cdot 3$ ja esimene tehe oli 3-e liitmine, ehk:

$$\left(\left(\left(\left(\left(0 + 3\right) \cdot 3 + 17\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 5 + 3\right) \cdot 3\right) + 17 = 2021$$

b) $((651 + 17) \cdot 3) + 17 = 2021$

Kuna 651 ei jagu 5-ga, siis eelmine tehe peab olema 3-ga korrutamine: $(217 \cdot 3)$ ehk

$$((217 \cdot 3 + 17) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Nüüd on kaks võimalust: kas $(214 + 3)$ või $(200 + 17)$, aga kuna 214 ei jagu 3-ga ega 5-ga, jääb ainult üks võimalus:

$$(((200 + 17) \cdot 3 + 17) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Kuna 200 ei jagu 3-ga, siis eelmine tehe on $(40 \cdot 5)$ ehk

$$(((40 \cdot 5 + 17) \cdot 3 + 17) \cdot 3) + 17 = 2021$$

Eelmised tehted sel juhul on kas $37 + 3$ või $23 + 17$, aga kuna 37 ja 23 mõlemad ei jagu 3-ga ega 5-ga, siis järelikult kumbki ei sobi.

Ehk ainuke võimalus saada 0-st 2021 on:

$$\left(\left(\left(\left((0 + 3) \cdot 3 + 17 \right) \cdot 5 + 3 \right) \cdot 5 + 3 \right) \cdot 3 \right) + 17 = 2021$$

Märkus: Alternatiivne lahendus on 0-st minnes, kuid siis tekib palju rohkem variante.

Hindamine:

Märkamine, et viimane tehe peab olema liitmine (või et esimene tehe peab olema liitmine) 1p

Näitamine, kuidas on võimalik 0-st saada 2021 2p

Tõestamine, et see on ainuke lahendus 4p

7p

Märkus: ainult õige vastus, et on üks võimalus – 0p